ECUACIONES FUNDAMENTALES DE UN FLUJO

ECUACIONES FUNDAMENTALES DE UN FLUJO

- **ECUACIÓN DE CONTINUIDAD**
- **ECUACIÓN DE LA ENERGÍA**
- **ECUACIÓN CANTIDAD DE MOVIMIENTO**
- **APLICACIONES ECUACIÓN DE LA ENERGÍA**
- **APLICACIONES ECUACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMINTO**

INTRODUCCIÓN

Son tres las ecuaciones fundamentales de un flujo:

- ecuación de continuidad (conservación de la masa)
- ecuación de la energía (conservación de la energía)
- ecuación de la cantidad de movimiento (conservación de la cantidad de movimiento).

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

En un flujo ***permanente,***

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

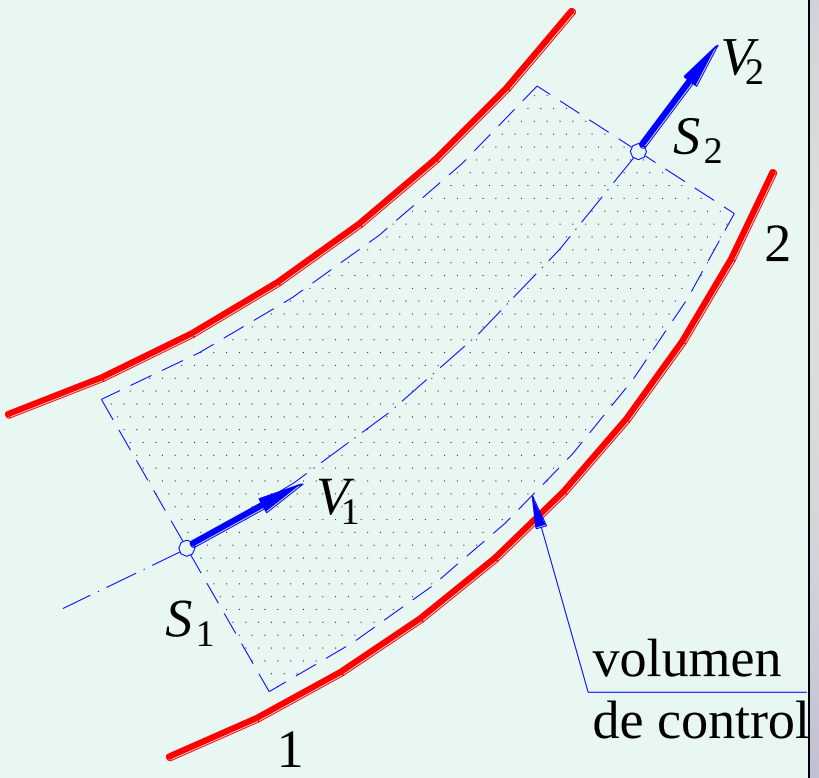
$$\rho_1 \cdot Q_1 = \rho_2 \cdot Q_2 = \rho \cdot Q$$

a) *para gases,*

$$\boxed{\dot{m} = \rho_1 \cdot V_1 \cdot S_1 = \rho_2 \cdot V_2 \cdot S_2}$$

b) *para líquidos* $(\rho_1 = \rho_2 = \rho)$

$$\boxed{Q = V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2}$$



Energía de un líquido en reposo (recordatorio)

$$E = \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2$$

La energía de un líquido en reposo viene dada por la suma de dos términos: ***energía de presión*** y ***energía de posición***.

En metros de columna de líquido,

$$H = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

Energía de un líquido en movimiento

A las dos energías anteriores hay que sumar la ***energía cinética*** del flujo:

$$E = \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g \cdot z \quad \text{J/kg en S.I.}$$

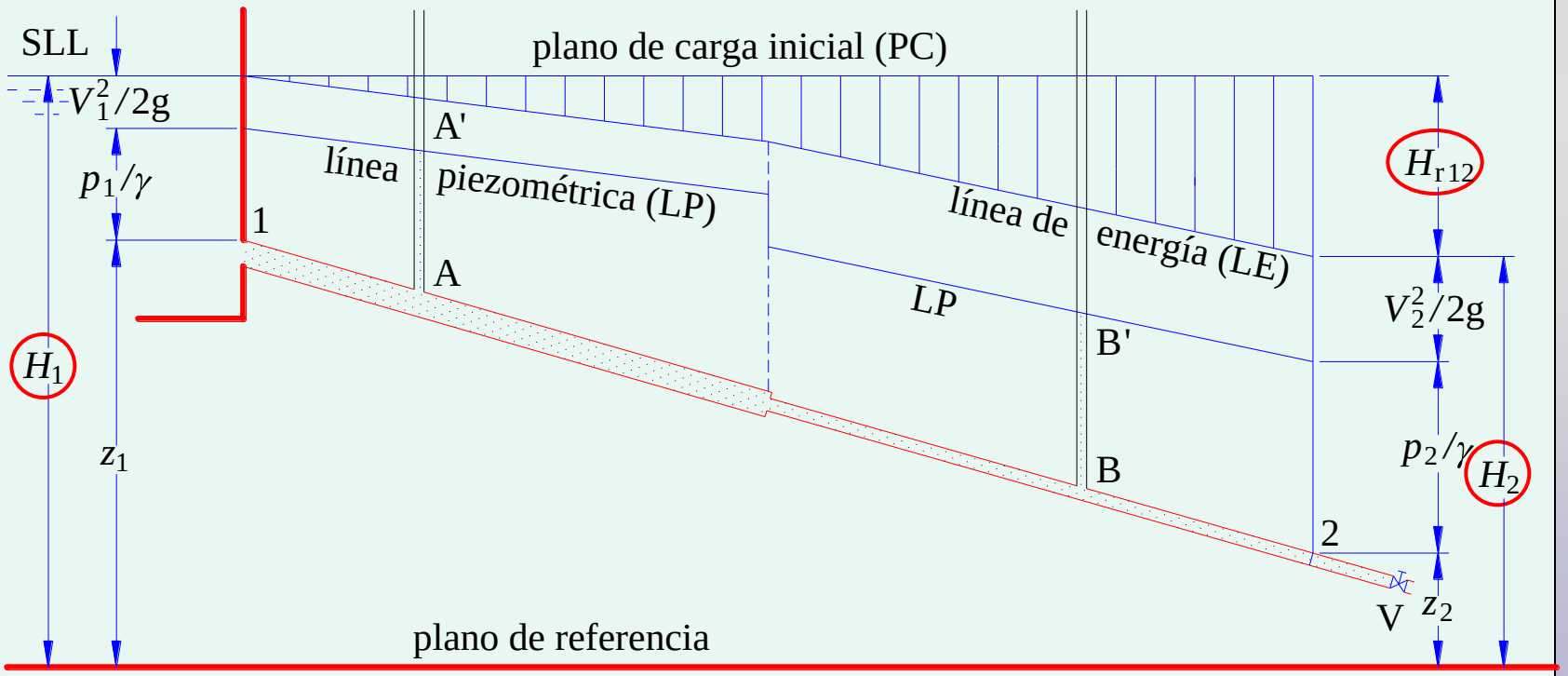
En metros de columna de líquido,

$$\boxed{H = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \quad \text{m}}$$

Ecuación energía en conducciones de líquidos

$$H_1 = H_2 + H_{r12}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + H_{r12}$$

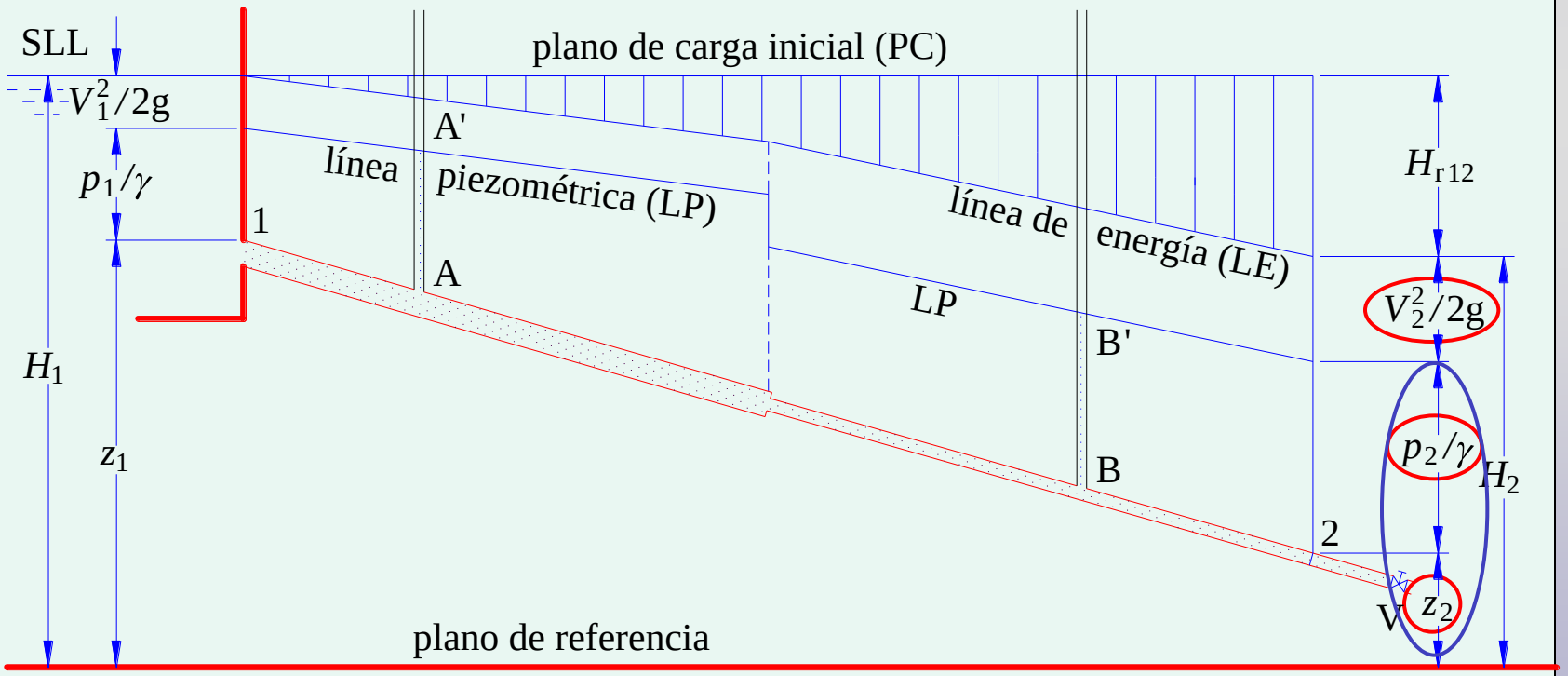


$V^2/2g$ = altura cinética (desnivel entre LE y LP)

p/γ = altura de presión (desnivel entre LP y conducto)

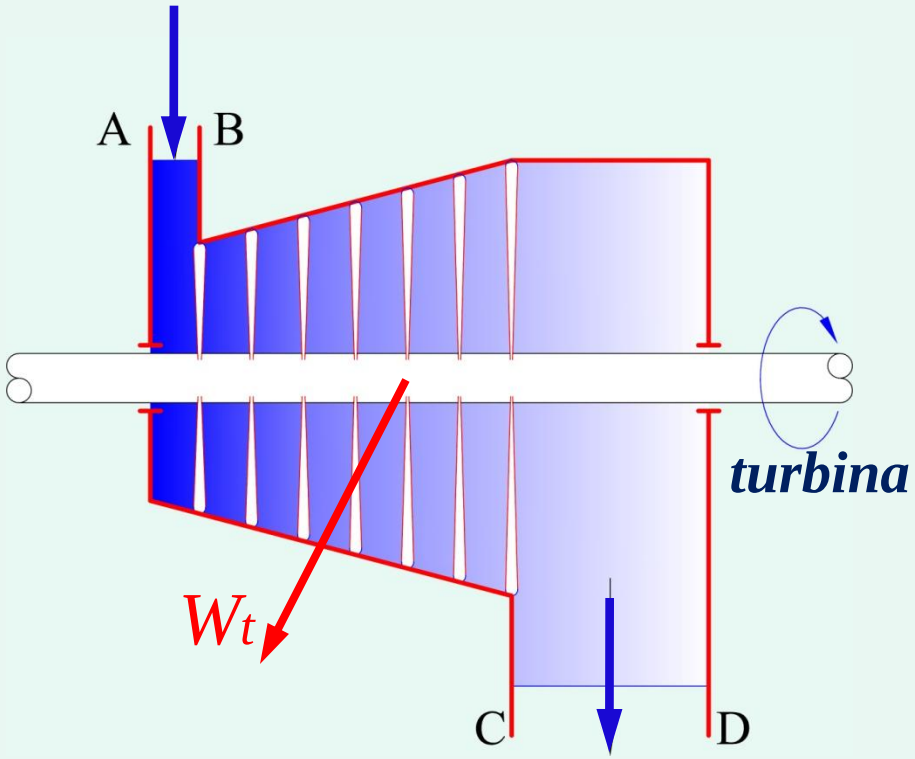
z = altura de posición respecto plano de referencia

$p/\gamma + z$ = altura piezométrica



Ecuación de la energía en máquinas de flujo líquido

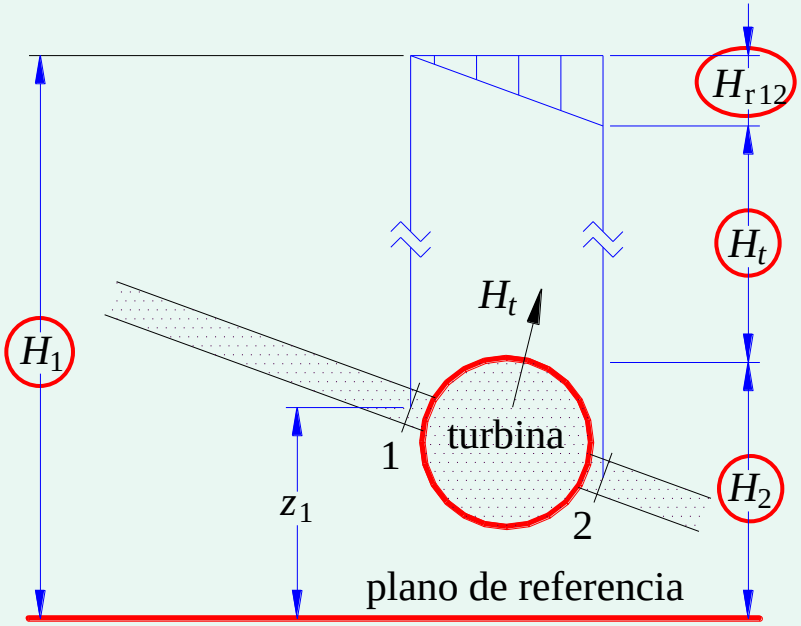
El trabajo (cedido o recibido) que atraviesa los límites de un sistema abierto se llama genéricamente, ***trabajo técnico, W_t***
Cuando de turbomáquinas se trata, como ocurre en la figura, es más intuitivo llamarlo ***trabajo interior en el eje.***

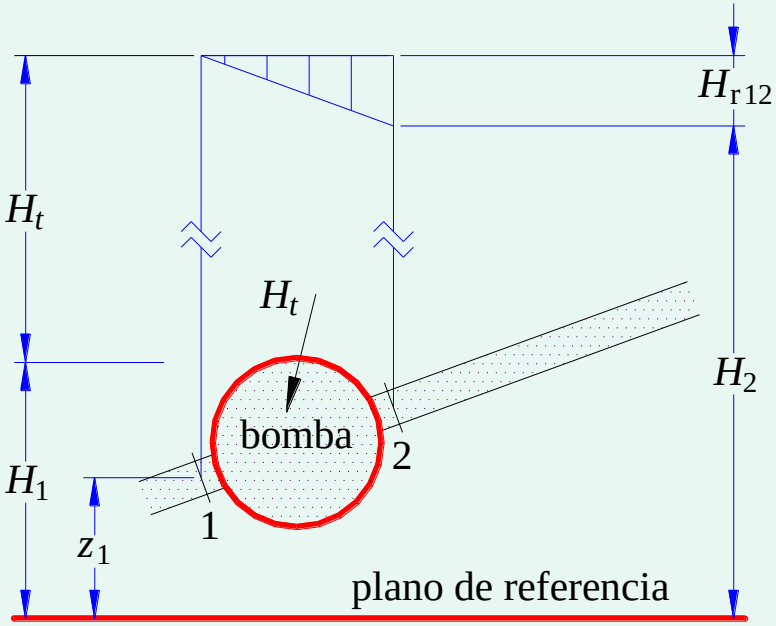


Ecuación energía en máquinas de flujo líquido

$$H_1 = H_2 + |H_{r12}| + H_t$$

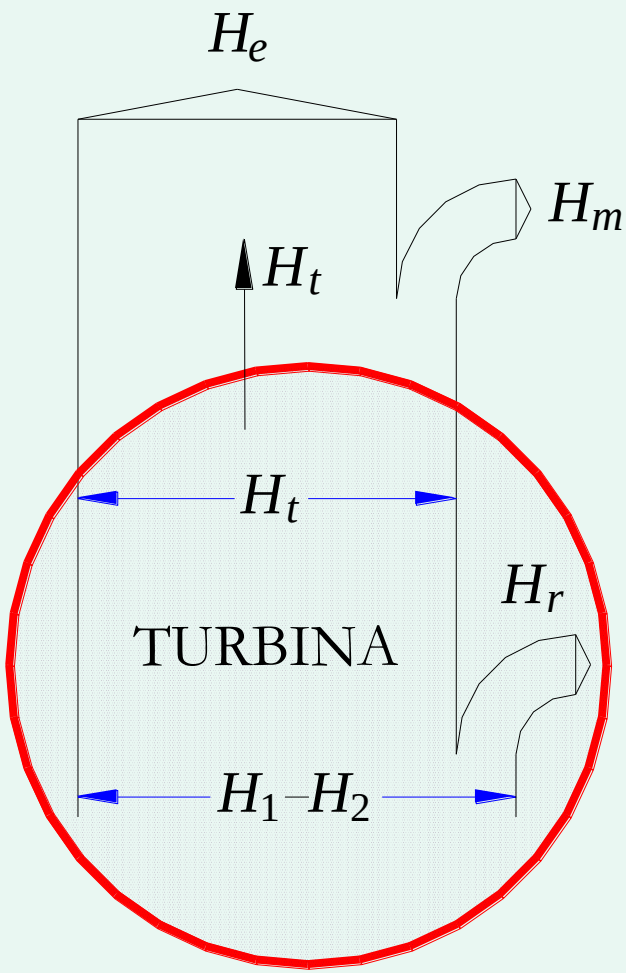
$$\boxed{H_t = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 - |H_r|}$$

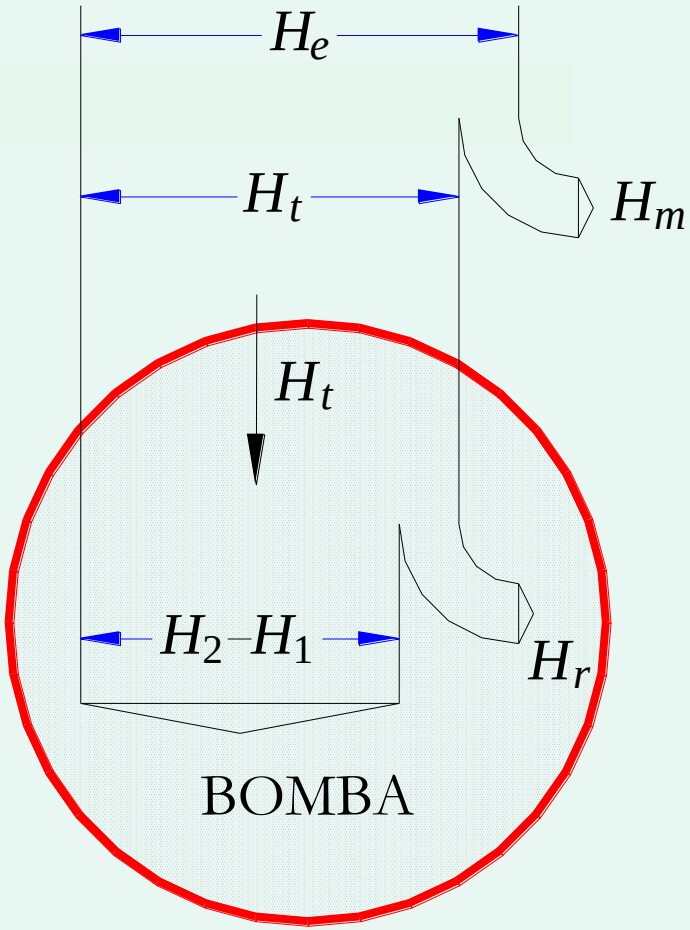




Representación gráfica

$$H_1 - H_2 = |H_{r12}| + H_t$$





Potencia de un flujo

$$\left.\begin{array}{l}\text{Caudal}: \quad Q\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s} \\ \text{Densidad}: \rho\ \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3\end{array}\right\} \rho \cdot Q\ \mathrm{kg/s}$$ **(*caudal másico*)**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Altura}: \quad H\ \mathrm{m} \\ \text{Gravedad}: g\ \mathrm{m}/\mathrm{s}^2\end{array}\right\} g \cdot H\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2\ (\mathrm{J/kg})$$

$$\boxed{P = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H \quad \mathrm{J/s}\ (\mathrm{W})}$$

EJERCICIO

La energía de un caudal de agua de 60 m^3/s, es $H = 50$ m. Calcúlese su potencia.

Solución

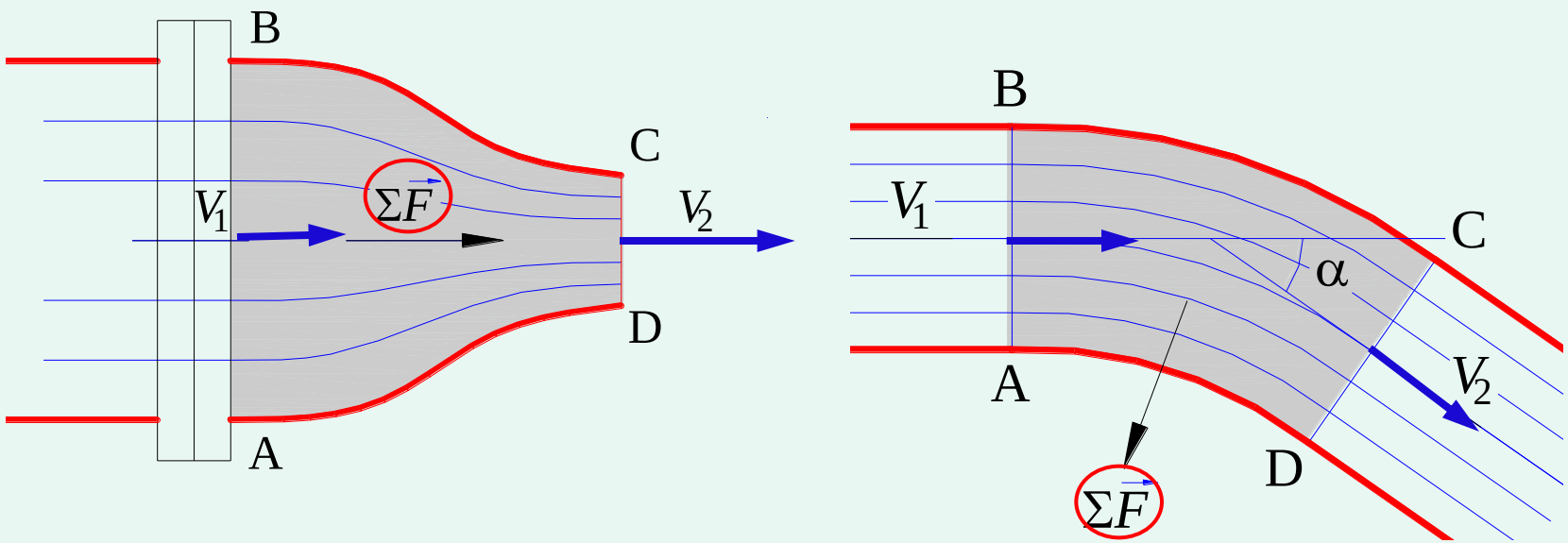
$$P = \gamma \cdot Q \cdot H = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 60 \cdot 50 =$$

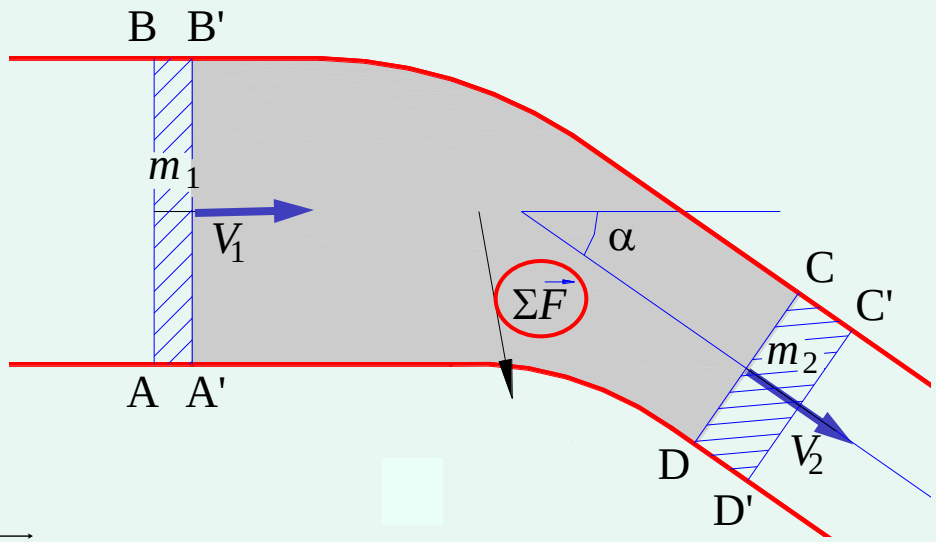
$$= 29430 \cdot 10^3 \text{ W} = 29430 \text{ kW } (40000 \text{ CV})$$

ECUACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Cuando a lo largo de un ***volumen de control***, la velocidad del flujo varía, es porque actúan fuerzas sobre él que lo aceleran:

$$\overrightarrow{\Sigma F} = m \cdot \vec{a}$$





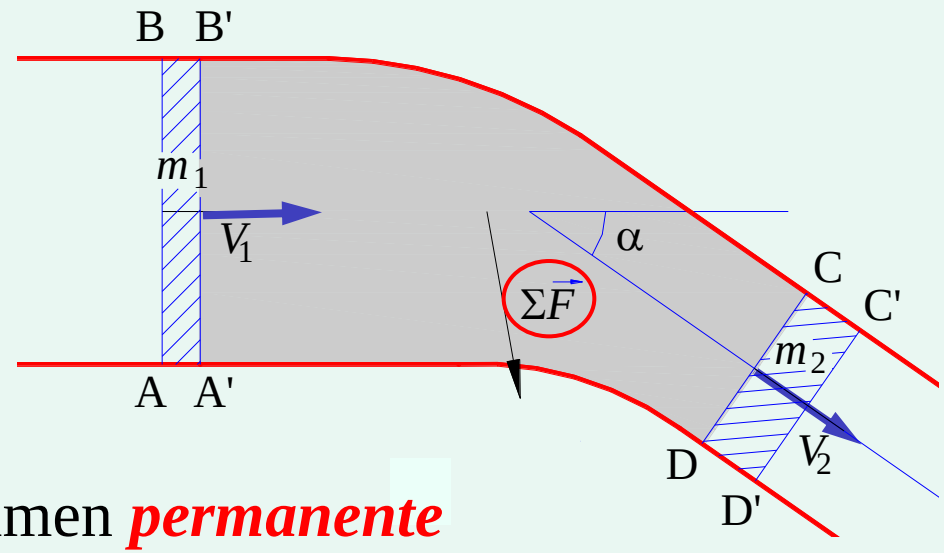
El impulso $(\overrightarrow{\Sigma F} \cdot dt)$ sobre la masa del ***volumen de control*** provocará una variación de su cantidad de movimiento $[d(m \cdot \vec{V})]$:

$$\overrightarrow{\Sigma F} \cdot dt = d(m \cdot \vec{V}) = \vec{dp}$$

Esta variación $\vec{dp}$ del sistema es la corresponde al instante $(t + dt)$, menos la que tenía en el instante t:

$$\vec{dp} = \vec{p}_{\text{A'B'C'D'}} - \vec{p}_{\text{ABCD}} =$$

$$= (\vec{p}_{\text{A'B'CD}} + \vec{p}_{\text{CDD'C'}}) - (\vec{p}_{\text{ABB'A'}} + \vec{p}_{\text{A'B'CD}})$$



Por ser el régimen ***permanente***

$$\overrightarrow{\Sigma F}\cdot dt = d\vec{p} = \vec{p}_{CDD'C'} - \vec{p}_{ABB'A'} =$$

$$= m_2\cdot\vec{V}_2 - m_1\cdot\vec{V}_1 = \dot{m}_2\cdot dt\cdot\vec{V}_2 - \dot{m}_1\cdot dt\cdot\vec{V}_1$$

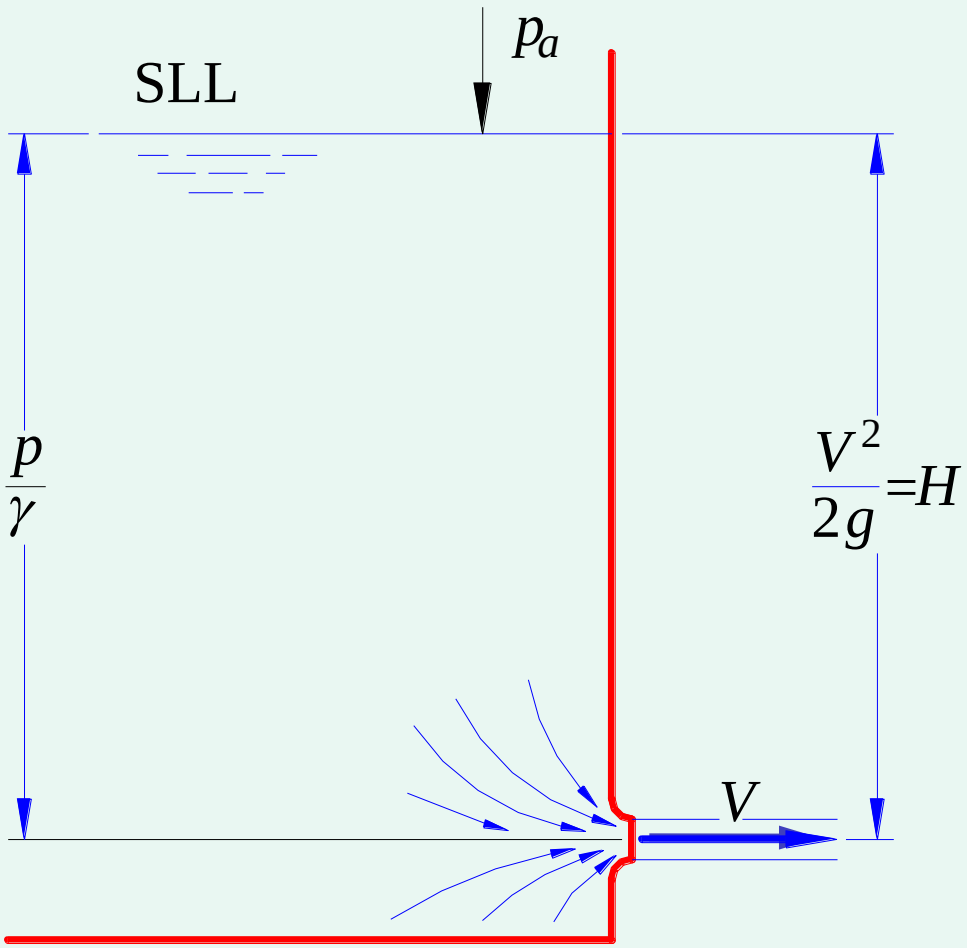
$$\overrightarrow{\Sigma F} = \dot{m}_2\cdot\vec{V}_2 - \dot{m}_1\cdot\vec{V}_1$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Sigma F} = \dot{m}\cdot(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)}$$

válida para líquidos y para gases

APLICACIONES ECUACIÓN DE LA ENERGÍA

Salida por un orificio



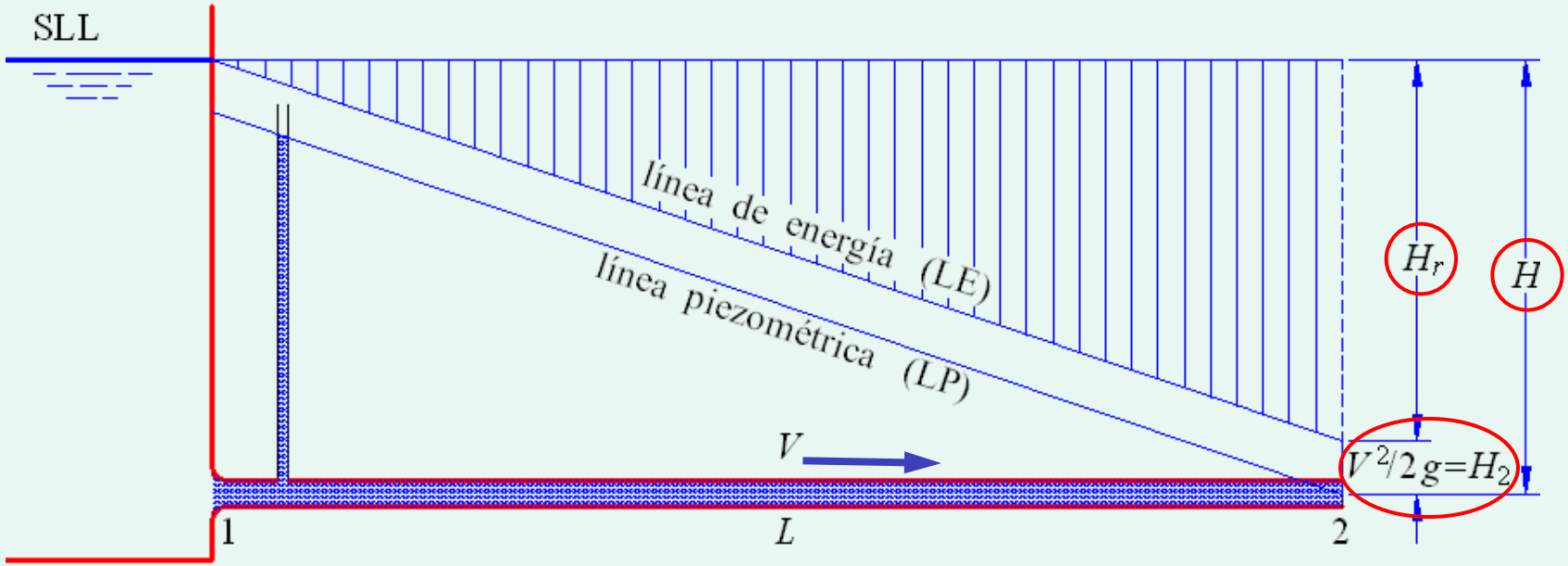
$$H = \frac{V^2}{2g}$$

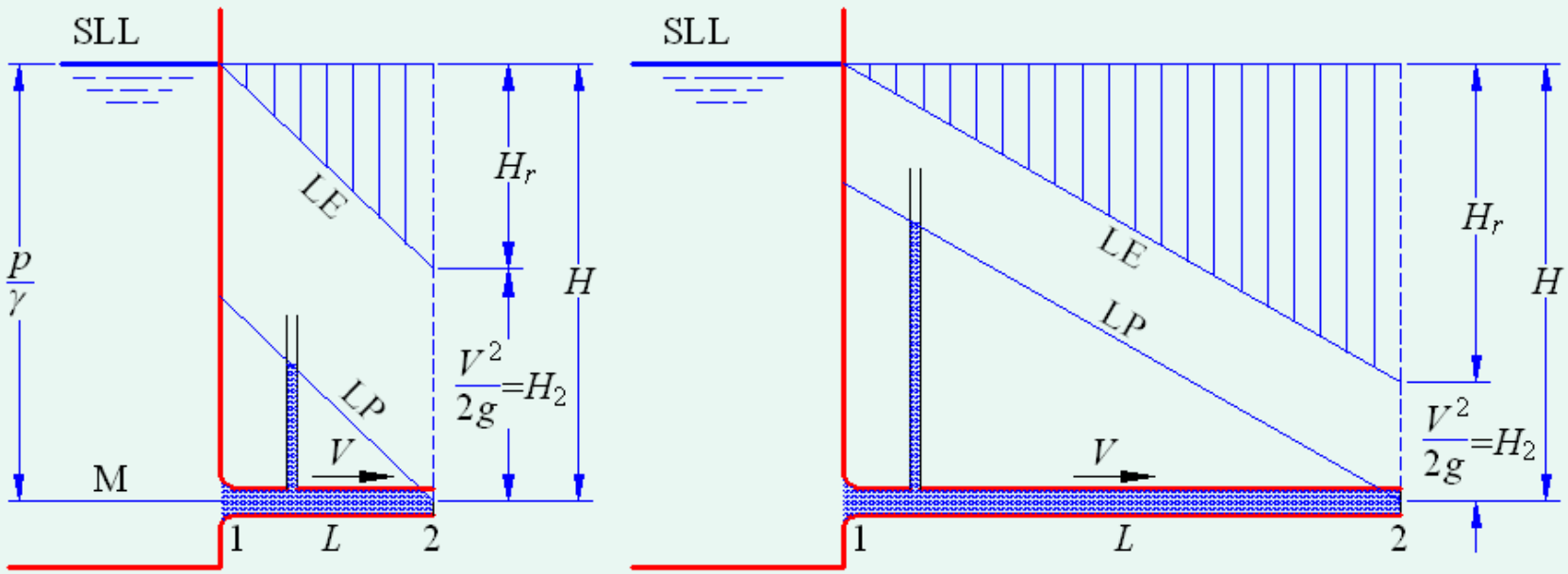
$$\boxed{V = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}}$$

Flujo en tuberías con salida libre

Con el mismo diámetro y el mismo desnivel entre el extremo 2 y la SLL, se cumple para cualquier longitud,

$$H = H_r + \frac{V^2}{2g}$$





$$H = H_r + \frac{V^2}{2g}$$

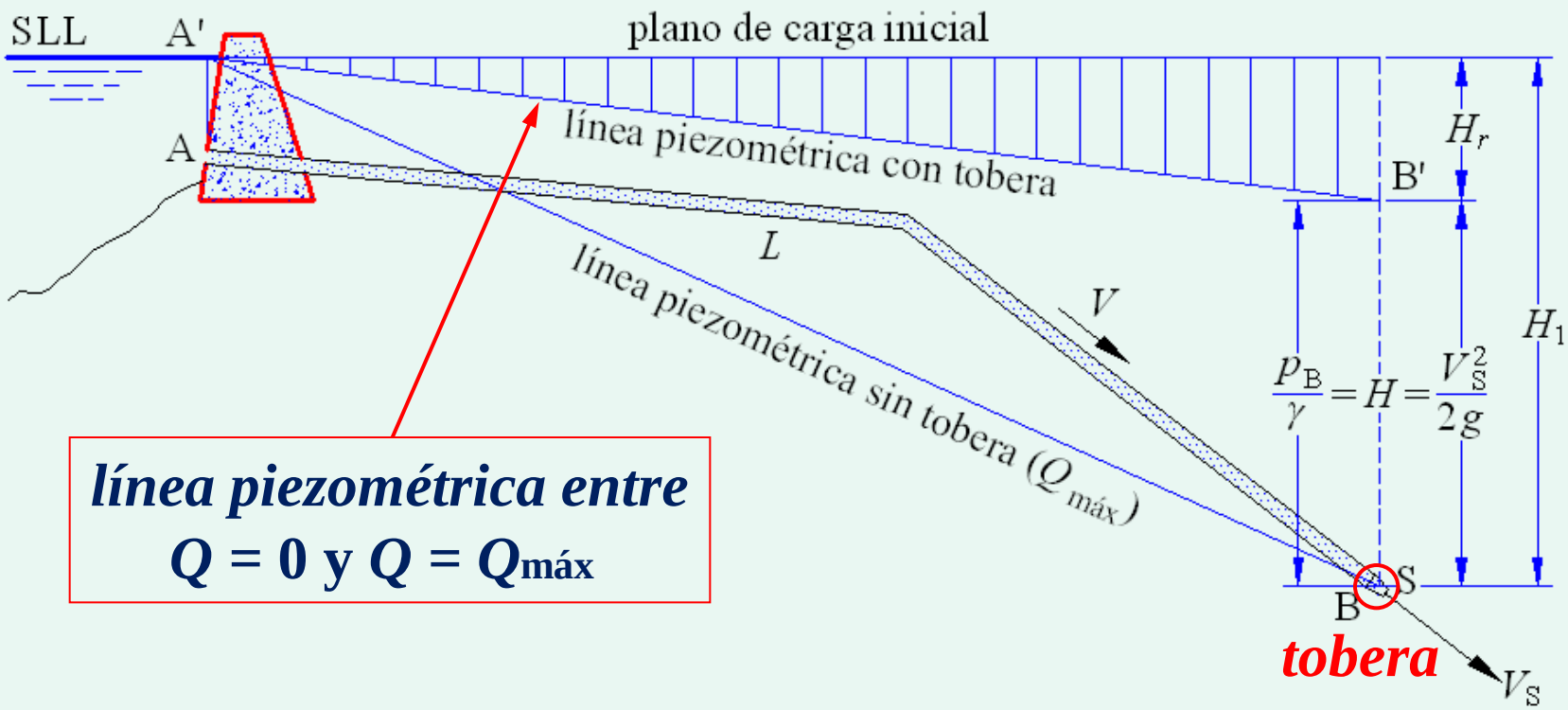
Mayor longitud L de la tubería origina:

- más pérdida de carga H_r
- menos velocidad V del flujo en la tubería
- menos caudal Q
- menos pérdida de carga unitaria J (H_r/L)

Salida por tobera

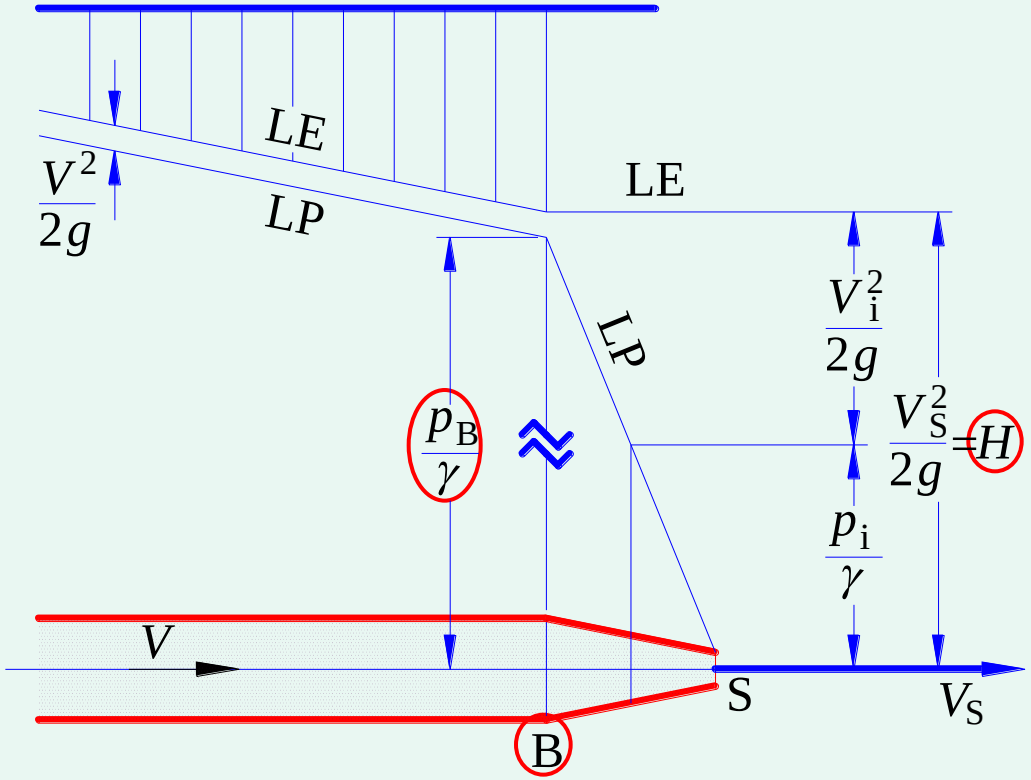
Se trata de colocar al final de la conducción una reducción de sección (tobera).

Cuanto más se reduzca la sección ***S*** de salida, menor será el caudal ***Q*** que circula, menor la velocidad ***V*** y menor H_r



línea piezométrica entre
Q = 0 y Q = Qmáx

En **B**, la energía ***H*** está prácticamente en forma de presión (***p_B/γ***). A lo largo de la tobera la velocidad aumenta y la presión disminuye. A la salida S, ***$p_S = p_a$***



una tobera es un transformador de energía potencial (energía de presión en líquidos) en energía cinética.

EJERCICIO

Calcúlese la sección de salida de la tobera al final de una conducción, de 10 km y 1 m de diámetro, origine la pérdida de 40 m en un salto de 400 m. Tómese,

$$H_r = 0{,}02 \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

Solución

Velocidad en la conducción

$$H_r = 0{,}02 \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}; \quad \frac{V^2}{2g} = \frac{H_r}{0{,}02 \cdot 10000} = 0{,}005 \cdot H_r$$

$$V^2/2g = 0{,}2\,\text{m}; \quad \underline{V = 1{,}981\,\text{m/s}}$$

Caudal

$$Q = \pi \cdot r^2 \cdot V = \pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 1{,}981 = 1{,}556\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

Velocidad de salida

$$H = V_S^2 / 2g = 360\ \mathrm{m}; \qquad V_S = 84{,}04\ \mathrm{m/s}$$

Diámetro de salida

$$S_S = Q / V_S = 1{,}556 / 84{,}04; \qquad \underline{D_S = 0{,}154\ \mathrm{m}}$$

***El diámetro de la tobera pasa de* 1 m *a* 0,15 m**

Conducción hidroeléctrica de Villarino

$$L = 15000\ \text{m}$$

$$H = 402\ \text{m}$$

$$D = 7{,}5\ \text{m};\ \ H_r = 40\ \text{m}$$

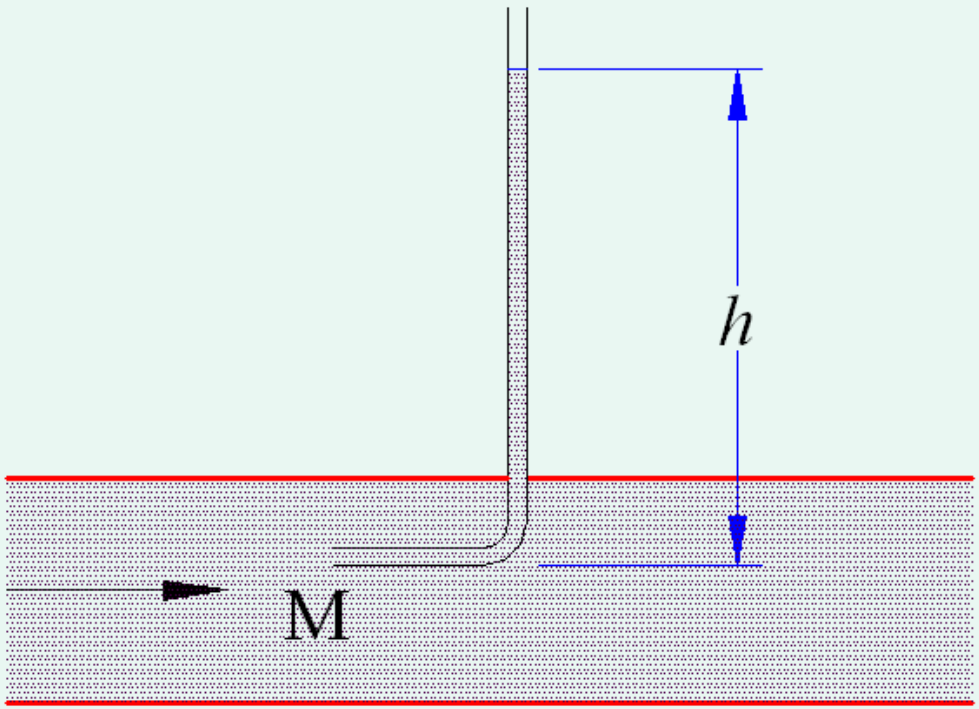
De haber sido :

$$D = 7{,}0\ \text{m};\ \ H_r = 60\ \text{m}$$

$$D = 8{,}0\ \text{m};\ \ H_r = 30\ \text{m}$$

Tubo de Pitot

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma}$$

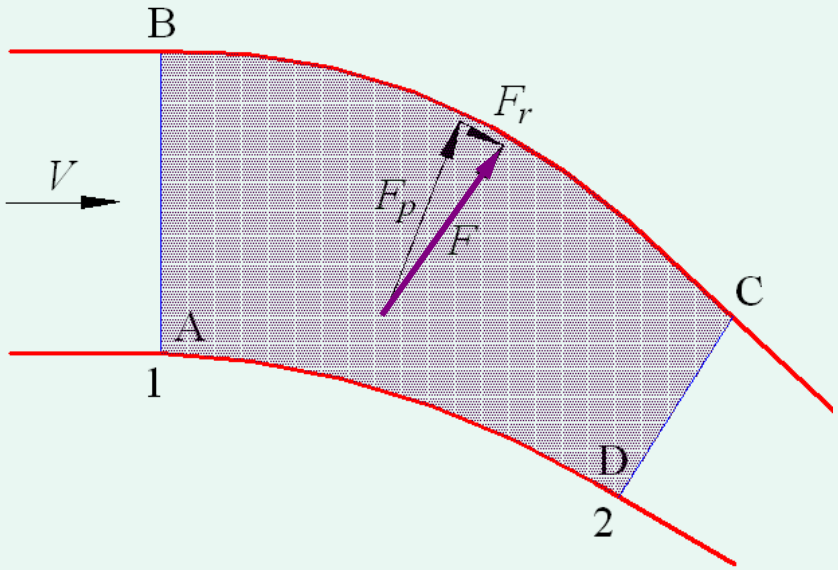


Mide las alturas de presión y de velocidad en el punto M

Fuerza sobre un conducto corto

$$\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_r$$

(F_r insignificante)



Fuerza sobre un conducto corto

Valoración indirecta de la fuerza F

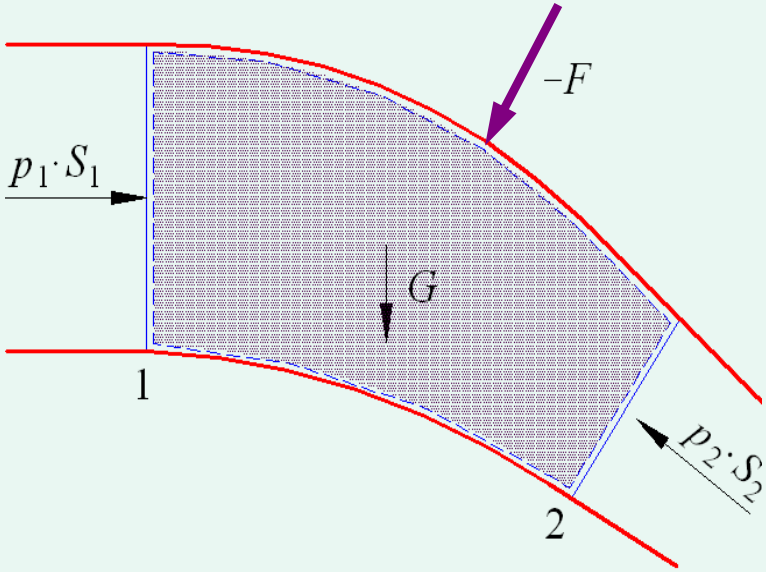
Las fuerzas sobre el volumen de control entre 1 y 2 son:

$\overrightarrow{p_1 \cdot S_1}$ = fuerza sobre la sección 1

$\overrightarrow{p_2 \cdot S_2}$ = fuerza sobre la sección 2

$-\vec{F}$ = fuerza que ejerce la pared

$\vec{G}$ = fuerza de gravedad



$$\overrightarrow{\Sigma F} = \overrightarrow{p_1 \cdot S_1} + \overrightarrow{p_2 \cdot S_2} + (-\vec{F}) + \vec{G}$$

$$\overrightarrow{\Sigma F} = \overrightarrow{p_1 \cdot S_1} + \overrightarrow{p_2 \cdot S_2} + (-\vec{F}) + \vec{G}$$

Por otra parte,

$$\overrightarrow{\Sigma F} = \dot{m} \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

Igualando y despejando $\vec{F}$

$$\vec{F} = \overrightarrow{p_1 \cdot S_1} + \overrightarrow{p_2 \cdot S_2} + \vec{G} - \dot{m} \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

En conductos cortos $G \approx 0$, en cuyo caso,

$$\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{p_1 \cdot S_1} + \overrightarrow{p_2 \cdot S_2} - \dot{m} \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)}$$

Cuando no hay flujo,

$$\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{p_1 \cdot S_1} + \overrightarrow{p_2 \cdot S_2}}$$

Generalmente la fuerza será mayor cuando no hay flujo.

Las presiones a sustituir en las fórmulas anteriores son la diferencia entre la interior y la que actúa exteriormente sobre el conducto. Si ésta fuera mayor, los términos de presión cambiarían de signo y con ello la fuerza F.

Cuando la presión exterior es la atmosférica, las presiones a sustituir son las relativas.

EJERCICIO

Calcúlese la fuerza sobre el codo de una conducción hidráulica, de 90º y de 2,8 m de diámetro,

a) cuando fluyen 38,75 m^3/s y la presión manométrica es de 8 bar,

b) cuando el flujo se anula bruscamente, momento en el que se prevé que la presión en el codo se eleve a 13 bar a causa de un golpe de ariete.

Solución a)

Velocidad media

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{38{,}75}{\pi \cdot 1{,}4^2} = 6{,}29 \text{ m/s}$$

Fuerza sobre el codo

$$\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{p_1 \cdot S_1} + \overrightarrow{p_2 \cdot S_2} - \dot{m} \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)}$$

$$F_x = p_1 \cdot S_1 + 0 + \rho \cdot Q \cdot V_1 =$$

$$= 8 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 1{,}4^2 + 1000 \cdot 38{,}75 \cdot 6{,}29 =$$

$$= 4926029 + 243737 =$$

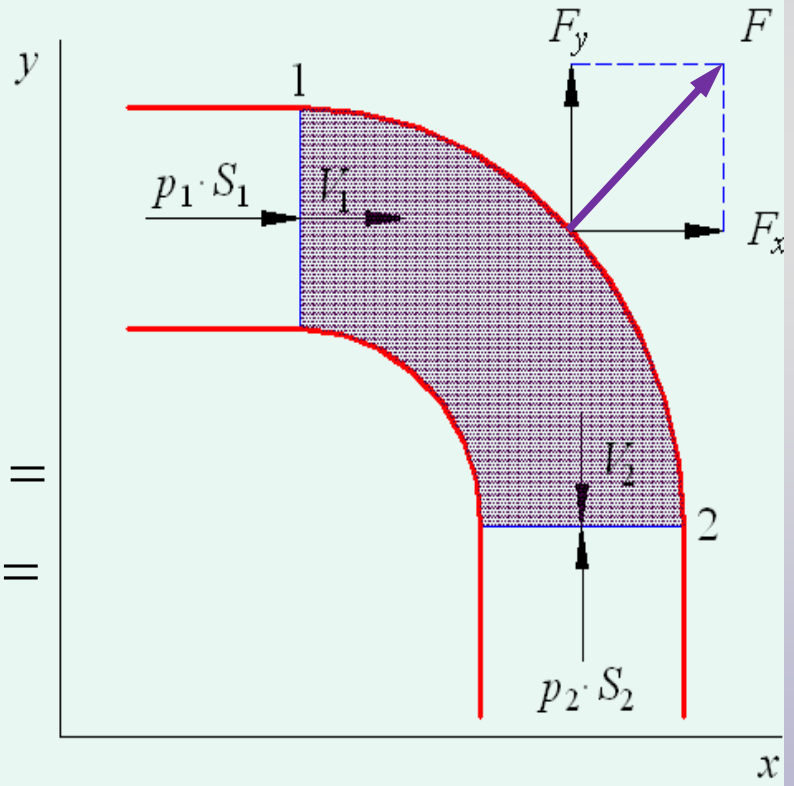
$$= 5169766 \text{ N} = 5169{,}8 \text{ kN}$$

$$F_y = 0 + p_2 \cdot S_2 + \rho \cdot Q \cdot V_2 =$$

$$= 8 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 1{,}4^2 + 1000 \cdot 38{,}75 \cdot 6{,}29 =$$

$$= 4926029 + 243737 = 5169766 \text{ N} =$$

$$= 5169{,}8 \text{ kN}$$

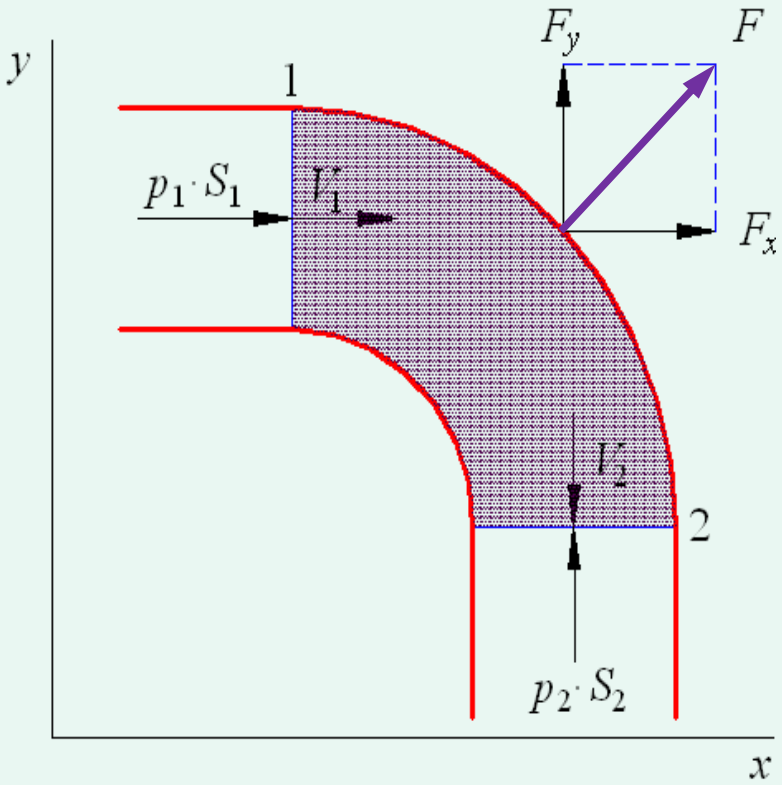


Solución b)

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{p_1 \cdot S_1} + \overrightarrow{p_2 \cdot S_2}$$

$$F_x = p_1 \cdot S_1 + 0 = 13 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 1{,}4^2 =$$
$$= 8004797 \text{ N} = 8004{,}8 \text{ kN}$$

$$F_y = 0 + p_2 \cdot S_2 = 13 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 1{,}4^2 =$$
$$= 8004797 \text{ N} = 8004{,}8 \text{ kN}$$



El anclaje del codo hay que calcularlo para esta última situación más desfavorable.